Calcul de sommes et de produits

Table des matières

1 Sommes finies de nombres

1.1 Notation

Définition 1.1 : *Notation d'une somme*

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des nombres réels, on utilise la lettre grecque $\sum$ pour désigner la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Elle se note alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \quad (\text{ou} \sum_{1 \leq k \leq n} u_k)$$

k désigne **l'indice** de la somme, 1 et n sont les **bornes** de la somme.

Si $p \in [\![1, n]\!]$, on peut faire commencer la somme à partir de l'indice p.

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k.$$

Plus généralement, si E est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $(u_k)_{k \in E}$ une famille indexée par E, on note la somme de tous les éléments de la famille $(u_k)_{k \in E}$

$$\sum_{k \in E} u_k.$$

Si E est vide, alors on pose $\sum\limits_{k \in E} u_k = 0$ par convention.

Exemple 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Remarque 1.2 : *Variable muette*

L'indice de la somme est une variable muette, ce qui signifie que l'on peut écrire

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i = \dots$$

Informatique 1.3 : *Python : première utilisation de la boucle for*

Une boucle for permet de répéter des instructions un nombre connu de fois. Cela peut permettre d'afficher le résultat de la somme des réels $u_1, u_2, \dots, u_n$ de la manière suivante :

```
S=0
for k in range(1,n+1) :
  S=S+u[k]
print(S)
```

Exemple 2. *On souhaite afficher la somme suivante :* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$.

```
S=0
for k in range(1,11) :
  S=S+1/k
print(S)
```

1.2 Sommes usuelles

Proposition 1.4 : *Somme à terme constant*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1.$$

Exemple 3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

Proposition 1.5 : *Somme géométrique*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement, soient n et p deux entiers et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $n \geq p$, on verra à l'exemple 7 que

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Proposition 1.6 : *Somme des n premiers entiers naturels non nuls*

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les sommes des exemples suivants ne sont pas explicitement au programme, mais il faut savoir les retrouver par récurrence.

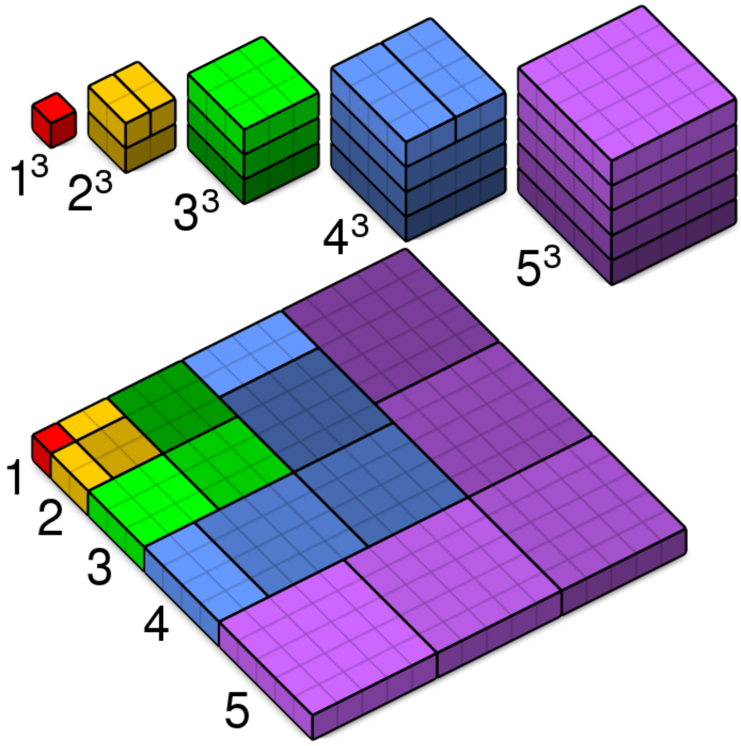
Exemple 4. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, d'après le chapitre Logique et raisonnements mathématiques,*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \textit{(somme des carrés)}$$

Exemple 5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 \qquad \textit{(théorème de Nicomaque)}$$

Solution.



1.3 Règles à connaître

1.3.1 Linéarité de la somme

Propriété 1.7 : *Linéarité*

Soient $(u_k)_{k\in E}$ et $(v_k)_{k\in E}$ deux familles finies de nombres réels et λ un nombre réel. On a les propositions suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k\in E} (\lambda\, u_k) = \lambda \left(\sum_{k\in E} u_k\right)$,
- $\displaystyle\sum_{k\in E} (u_k + v_k) = \left(\sum_{k\in E} u_k\right) + \left(\sum_{k\in E} v_k\right)$.

Démonstration. Elle découle directement des règles de calculs sur les réels qui permettent de factoriser dans le premier cas et de réorganiser les éléments des sommes dans le deuxième. □

Exemple 6. *Calculer*

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 100 \times 101.$$

Solution.

Propriété 1.8 : *Sommation par paquets*

Soient $(u_k)_{k\in E}$ une famille finie de nombres réels et $E = E_1 \cup E_2$ une partition de E. Alors :

$$\sum_{k\in E} u_k = \sum_{k\in E_1} u_k + \sum_{k\in E_2} u_k.$$

Démonstration. La propriété de sommation par paquets est un simple regroupement des termes de la somme en deux "paquets". □

Corollaire 1.9 : *Relation de Chasles*

Soient $0 \le p \le q \le n$ et $(u_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q-1} u_k + \sum_{k=q}^{n} u_k.$$

Démonstration. Il suffit de voir que $[\![p,n]\!] = [\![p,q]\!] \cup [\![q+1,n]\!] = [\![p,q-1]\!] \cup [\![q,n]\!]$ sont des partitions de $[\![p,n]\!]$ et d'appliquer la propriété précédente. □

1.3.2 Changement d'indice

On a vu que dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la lettre k (l'indice de sommation) est une variable muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre ou symbole.

Propriété 1.10 : *Translation d'indice*

Soient $0 \le p \le n$, $q \in \mathbb{N}$ et u_{q+p}, u_{q+p+1}, $\ldots$, u_{q+n-1}, u_{q+n} des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_{q+k} = u_{q+p} + u_{q+p+1} + \cdots + u_{q+n-1} + u_{q+n} = \sum_{i=q+p}^{q+n} u_i.$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = q + k$.

Exemple 7. *Soient n et p deux entiers et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $n \ge p$, on effectue le changement d'indice $i = k - p$*

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \sum_{k=p}^{n} q^{k-p} = q^p \sum_{i=0}^{n-p} q^i = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

On a utilisé le résultat de la proposition 1.5.

Exemple 8. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer (sans la scinder en 3 sommes)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \left(k^2 - 2k + 1\right)$.

Solution.

Propriété 1.11 : *Retournement d'indice*

Soient $0 \leq p \leq n \leq q$ et $u_{q-n}, u_{q-n+1}, \ldots, u_{q-p-1}, u_{q-p}$ des nombres réels. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_{q-k} = u_{q-p} + u_{q-(p+1)} + \cdots + u_{q-(n-1)} + u_{q-n} = \sum_{i=q-n}^{q-p} u_i.$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice : $i = q - k$.

Exemple 9. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2\sqrt{i} \qquad \textit{avec le changement d'indice } i = n-k.$$

1.3.3 Somme télescopique

Propriété 1.12 : *Somme télescopique*

Soient $0 \leq p \leq n$ et $(u_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_p.$$

Exemple 10. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution.

Exemple 11. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \Big(k\,.\,k!\Big)$ *(voir définition 2.1 pour factorielle).*

Solution.

1.3.4 Inégalité triangulaire

Proposition 1.13 : *Inégalité triangulaire*

Soient $0 \leq p \leq n$ et $(u_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\left|\sum_{k=p}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=p}^{n} |u_k|\,.$$

Démonstration. Montrons que pour u_1 et u_2 deux réels, $|u_1 + u_2| \leq |u_1| + |u_2|$.

$$\begin{aligned}
|u_1 + u_2| \leq |u_1| + |u_2| \quad &\Leftrightarrow \quad |u_1 + u_2|^2 \leq (|u_1| + |u_2|)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \leq u_1^2 + 2\,|u_1|\,.\,|u_2| + u_2^2 \\
&\Leftrightarrow \quad u_1u_2 \leq |u_1|\,.\,|u_2| \\
&\Leftrightarrow \quad u_1u_2 \leq |u_1u_2| \qquad \text{qui est toujours vrai.}
\end{aligned}$$

Démonstration à poursuivre en exercice par récurrence. □

1.4 Sommes doubles

1.4.1 Somme double à indices indépendants

Si $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $(u_{i,j})$ est une famille de nombres réels avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$. On peut représenter ces nombres dans un tableau où l'indice i représente le numéro de ligne et l'indice j le numéro de colonne :

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	m
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$\dots$	$u_{1,m}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$\dots$	$u_{2,m}$
3	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$\dots$	$u_{3,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$u_{n,3}$	$\dots$	$u_{n,m}$

La somme de tous ces nombres se note

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} u_{i,j}.$$

Si $m=n$, la somme $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} u_{i,j}$ se note plus simplement $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} u_{i,j}$.

Exemple 12. *Pour $n=3$, on a*

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} u_{i,j} = u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3}+u_{2,1}+u_{2,2}+u_{2,3}+u_{3,1}+u_{3,2}+u_{3,3}.$$

Pour calculer une somme double, on peut soit faire la somme des termes ligne par ligne, soit faire la somme des termes colonne par colonne.

Propriété 1.14 : *Interversion des sommes*

Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $(u_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right).$$

Il est donc inutile de laisser les parenthèses :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}.$$

Exemple 13. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.*

Solution.

1.4.2 Somme double à indices dépendants

On peut vouloir ne calculer la somme que pour un certain nombre des termes $u_{i,j}$.

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	m
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$\dots$	$u_{1,m}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$\dots$	$u_{2,m}$
3	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$\dots$	$u_{3,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$u_{n,3}$	$\dots$	$u_{n,m}$

Si Δ est l'ensemble des indices à sommer, on écrira

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} u_{i,j}.$$

Dans l'ensemble des exemples suivants on suppose que $m = n$.

Exemple 14. Somme des termes diagonaux

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	n
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$\dots$	$u_{1,n}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$\dots$	$u_{2,n}$
3	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$\dots$	$u_{3,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$u_{n,3}$	$\dots$	$u_{n,n}$

On a donc $\Delta = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ *tel que* $i = j\}$,

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}.$$

Exemple 15. Somme des termes sous-diagonaux au sens large

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	n
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$\dots$	$u_{1,n}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$\dots$	$u_{2,n}$
3	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$\dots$	$u_{3,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$u_{n,3}$	$\dots$	$u_{n,n}$

On a donc $\Delta = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ *tel que* $i \geq j\}$,

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} u_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} u_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} u_{i,j}\right) & \textit{si on somme ligne par ligne,} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}\right) & \textit{si on somme colonne par colonne.} \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 4$,

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq 4} u_{i,j} = u_{1,1} + u_{2,1} + u_{2,2} + u_{3,1} + u_{3,2} + u_{3,3} + u_{4,1} + u_{4,2} + u_{4,3} + u_{4,4}.$$

Exemple 16. Somme des termes sous-diagonaux au sens strict

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	n
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$\dots$	$u_{1,n}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$\dots$	$u_{2,n}$
3	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$\dots$	$u_{3,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$u_{n,3}$	$\dots$	$u_{n,n}$

On a donc $\Delta = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ *tel que* $i > j\}$,

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} u_{i,j} = \sum_{1\leq j<i\leq n} u_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j}\right) & \text{si on somme ligne par ligne,} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j}\right) & \text{si on somme colonne par colonne.} \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 4$,

$$\sum_{1\leq j<i\leq 4} u_{i,j} = u_{2,1} + u_{3,1} + u_{3,2} + u_{4,1} + u_{4,2} + u_{4,3}.$$

Exemple 17. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, *on pose* $u_{i,j} = \dfrac{j}{i}$. *Calculer la somme* $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} u_{i,j}$.

Solution.

2 Produits finis de nombres

2.1 Notation

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des nombres réels, on utilise la lettre grecque $\prod$ pour désigner le produit de tout ces nombres.

$$u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

De même que pour la somme, on a des notations de types $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k$ et $\displaystyle\prod_{k\in E} u_k$.

Si E est vide, alors on pose $\displaystyle\prod_{k\in E} u_k = 1$ par convention.

Définition 2.1 : *Factorielle*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n et on note $n!$ l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

La convention précédente implique que $0! = 1$. En effet, l'ensemble des k tels que $1 \leq k \leq 0$ est vide.
On peut également définir $n!$ de manière récursive :

$$0! = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ n! = n \times (n-1)!.$$

Exemple 18. *Les premières valeurs de factorielle sont, en plus de* $0! = 1$ *:*

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720.$$

2.2 Quelques propriétés

Propriété 2.2 : *Produit*

Soient $(u_k)_{k\in E}$ et $(v_k)_{k\in E}$ deux familles finies de nombres réels, λ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. On a les propositions suivantes :

- $\displaystyle\prod_{k\in E} (\lambda\, u_k) = \lambda^{card(E)} \left(\prod_{k\in E} u_k\right)$,
- $\displaystyle\prod_{k\in E} (u_k v_k) = \left(\prod_{k\in E} u_k\right) \times \left(\prod_{k\in E} v_k\right)$,
- $\displaystyle\prod_{k\in E} (u_k)^n = \left(\prod_{k\in E} u_k\right)^n$,
- $\displaystyle\prod_{k\in E} \left(\frac{u_k}{v_k}\right) = \frac{\prod_{k\in E} u_k}{\prod_{k\in E} v_k}$ si aucun des v_k n'est nul.

Exemple 19. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit des n premiers entiers pairs (non nuls !).*

Solution.

Comme pour les sommes, on peut également regrouper les éléments par paquets, faire un changement d'indice et même faire un produit télescopique comme on le voit dans la propriété qui suit.

Propriété 2.3 : *Produit téléscopique*

Soient $0 \leq p \leq n$ et $(u_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$ une famille de nombres réels non nuls. Alors :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}.$$

Exemple 20. *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) > \frac{1}{2}$.

Solution.

Propriété 2.4 : *Exponentielle et logarithme*

Soient $0 \leq p \leq n$ et $(u_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

- $\displaystyle\exp\left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \exp(u_k)$.
- $\displaystyle\ln\left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(u_k)$.

Exemple 21. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. *Montrer que*

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Solution.

3 Coefficients binomiaux

3.1 Définition

Définition 3.1 : *Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments*

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de parties à p éléments de E se nomme le **coefficient binomial de p parmi n** et se lit "p parmi n". Il se note

$$\binom{n}{p}$$

Cette quantité se note également C_n^p, mais cette notation est hors-programme.

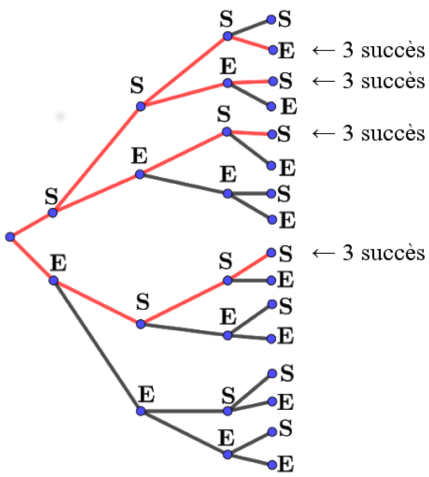
Par convention, on pose $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$, car il n'y a aucune partie d'un ensemble à n éléments contenant strictement plus de n éléments.

Remarque 3.2 : *Arbre binaire*

Les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments peuvent être vues comme le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions. Le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.

En effet, suivre un chemin revient à choisir pour chacune des n expériences si on a un succès ou un échec. Il y a $\binom{n}{p}$ chemins complets pour lesquels on choisit p fois un succès.

Exemple 22. *Pour $n = 4$ et $p = 3$,*



On remarque que $\binom{4}{3} = 4$.

3.2 Calcul des coefficients binomiaux

Propriété 3.3 : *Formule de Pascal*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Alors :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Démonstration. Considérons un ensemble E de cardinal $n+1$ ainsi qu'un élément x de E. Les parties de E de cardinal $p+1$, qui sont au nombre de $\binom{n+1}{p+1}$, peuvent être classées en deux catégories :

- celles qui ne contiennent pas x, qui sont les parties de cardinal $p+1$ de $E \setminus \{x\}$. Il en existe $\binom{n}{p+1}$,
- celles qui contiennent x, qui s'obtiennent en ajoutant x à une partie de cardinal p de $E \setminus \{x\}$: il en existe donc autant que de parties de cardinal p de $E \setminus \{x\}$, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.

On obtient bien $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$. □

Théorème 3.4 : *Formule du coefficient binomial*

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}, & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

$$\text{“}\forall p \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}, & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}\text{”}$$

<u>Initialisation :</u> Comme le seul sous-ensemble de l'ensemble vide est l'ensemble vide,

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!\,(0-0)!}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n **fixé**. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $p \in [\![0, n]\!]$, alors d'après la formule de Pascal (propriété 3.3),

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right) \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!} \\ &= \left(\frac{n+1}{(n-p)\,(p+1)}\right) \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} \end{aligned}$$

De plus, comme le seul sous-ensemble de cardinal 0 d'un ensemble de cardinal $n+1$ est l'ensemble vide, on a bien

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. □

Exemple 23. *Dans une urne avec 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire quatre boules simultanément. Un tirage simultané de quatre boules est une partie à 4 éléments d'un ensemble à 10 éléments : il y a* $\displaystyle\binom{10}{4} = 210$ *tirages possibles.*

Propriété 3.5 : *Coefficient binomial*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On a les propositions qui suivent.

(i) Si $p \neq 0$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

(ii) $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie)

Démonstration. (i) Si $p \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\,\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,\big(n-1-(p-1)\big)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

(ii) En remarquant que $n-(n-p) = p$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}$$

□

Exemple 24. *Montrer que les coefficients binomiaux sont tous des entiers.*

Solution.

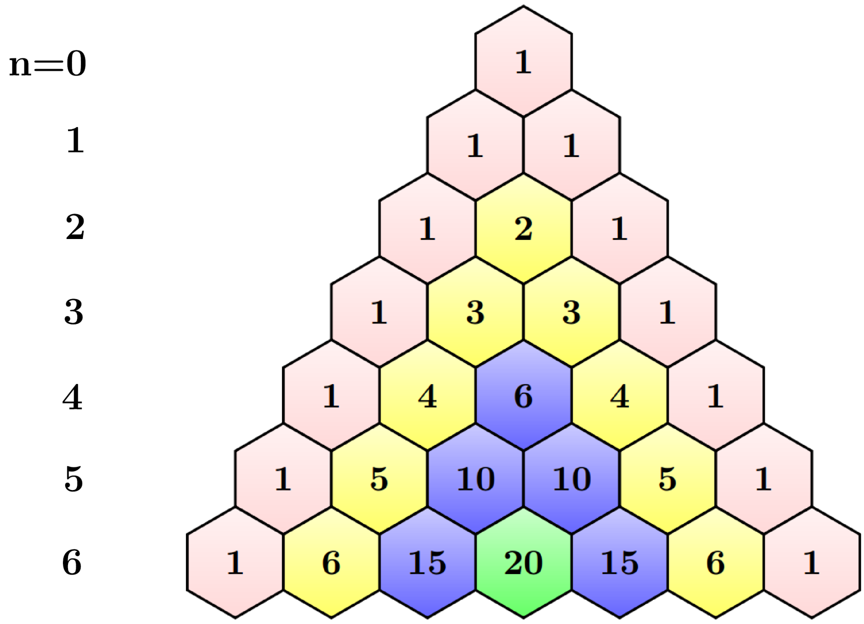
Remarque 3.6 : *Coefficients binomiaux à connaître*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

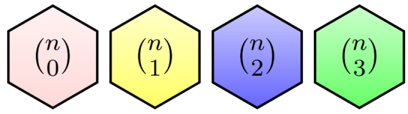
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.3 Triangle de Pascal

La formule de Pascal (propriété 3.3) permet de construire simplement le triangle de Pascal, un tableau infini qui contient tous les coefficients binomiaux.



Avec le code couleur suivant :



Triangle de Pascal

Ces valeurs sont à connaître (au moins jusqu'à $n = 5$). Cela permettra d'utiliser plus facilement la formule qui suit.

3.4 Binôme de Newton

La formule qui suit est très importante et intervient dans tous les domaines de mathématiques. Vous connaissez sa forme pour $n = 2$. Il faut maintenant connaître sa forme pour $n = 3, 4, 5$ et sa forme généralisée.

Théorème 3.7 : *Binôme de Newton*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$".

Initialisation : On a simplement :

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0\, b^0.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n **fixé**. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^{n+1} & = & (a+b)\,(a+b)^n \\
\text{(par hypothèse de récurrence)} & = & (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k} \\
\text{(on développe)} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\,b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n+1-k} \\
\text{(changement d'indice } k\leftarrow k+1) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k\,b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n+1-k} \\
\text{(extraction des termes de bords)} & = & \displaystyle\left(a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k\,b^{n+1-k}\right)+\left(b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n+1-k}\right) \\
\text{(regroupement des sommes)} & = & \displaystyle a^{n+1}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k\,b^{n+1-k}\right)+b^{n+1} \\
\text{(formule de Pascal)} & = & \displaystyle a^{n+1}+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k\,b^{n+1-k}\right)+b^{n+1} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\,b^{n+1-k}
\end{array}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}.$$

□

Exemple 25. *Pour* $x\in\mathbb{R}$*,*

$$\begin{array}{rcl}
(2x+3)^4 & = & 3^4+4\times(2x)\times3^3+6\times(2x)^2\times3^2+4\times(2x)^3\times3+(2x)^4 \\
 & = & 81+216\,x+216\,x^2+96\,x^3+16\,x^4.
\end{array}$$

Remarque 3.8 : *Cas d'une différence*

On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence :

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,a^k\,b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,b^k\,a^{n-k}.$$

En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple 26. *Pour* $x\in\mathbb{R}$*,*

$$(1-x)^5=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5.$$

Proposition 3.9 : *Formule de Vandermonde*

Soient a, b et n trois entiers tels que $0 \leq n \leq a+b$. Alors :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un groupe constitué de a hommes et b femmes, parmi lesquels on veut choisir n personnes. Le nombre de possibilités de faire ce choix est donc

$$\binom{a+b}{n}.$$

Mais on peut également classer les groupes de n personnes en catégories selon le nombre d'hommes qu'ils contiennent :

- soit 0 homme et n femmes : il y a $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ tels groupes,
- soit 1 homme et $n-1$ femmes : il y a $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ tels groupes,
- ...
- soit n hommes et 0 femme : il y a $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ tels groupes.

Le nombre total de groupes possibles vaut donc aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. □

Exemple 27. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient d'après la formule de Vandermonde :*

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad \textit{par symétrie (propriété 3.5).}$$

3.5 Ensemble des parties

Proposition 3.10 : *Dénombrement des parties*

Si E est un ensemble de cardinal n, alors l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et :

$$card\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. On sait que pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments. Le nombre total de sous-ensembles est donc

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Ce qui peut s'écrire d'après la formule du binôme (théorème 3.7),

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

□